



Lineare Algebra (Informatik)

Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (Lineares Gleichungssystem)

Es sei eine invertierbare 4×4 -Matrix A gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Verfahrens die Lösung von $A \cdot x = b$ mit allgemeinem $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$.

Lösung 1 Wir wenden das Gaußsche Eliminationsverfahren auf die erweiterte Matrix $(A|b) \in M(4 \times 5, \mathbb{R})$,

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & b_1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & b_2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & b_3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & b_4 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & b_1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & b_2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & b_3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & b_4 \end{array} \right) \xrightarrow{(IV) \mapsto (I)+(IV)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & b_1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & b_2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & b_3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & b_1 + b_4 \end{array} \right) \xrightarrow{(III) \mapsto (III)-(I), (II) \mapsto (II)-(I)} \\ & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & b_1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & b_2 - b_1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & b_3 - b_1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & b_1 + b_4 \end{array} \right) \xrightarrow{(II) \leftrightarrow (III)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & b_1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & b_3 - b_1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & b_1 + b_4 \end{array} \right) \xrightarrow{(IV) \mapsto (II)+(III)+(IV)} \\ & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & b_1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & b_3 - b_1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & b_2 + b_3 + b_4 - b_1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zum folgenden Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= b_1, \\ -2x_2 + 2x_4 &= b_3 - b_1, \\ -2x_3 + 2x_4 &= b_2 - b_1, \\ 4x_4 &= b_2 + b_3 + b_4 - b_1. \end{aligned}$$

Wir setzen $x_4 = \frac{1}{4}(b_2 + b_3 + b_4 - b_1)$ in die dritte und vierte Gleichungen ein und erhalten eindeutige Lösungen für x_2 bzw. x_3 . Indem wir alle drei Werte in die erste Lösung einsetzen, bekommen wir auch eine Lösung für x_1 , und somit ist

$$x = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} b_1 + b_2 + b_3 - b_4 \\ b_1 + b_2 - b_3 + b_4 \\ b_1 - b_2 + b_3 + b_4 \\ -b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \end{pmatrix}$$

die eindeutige Lösung der Gleichung $A \cdot x = b$.

Aufgabe 2 (Inverse Matrix) Falls möglich, invertieren Sie die folgende Matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lösung 2

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(\text{II}) \mapsto (\text{II}) + (-\frac{3}{4})(\text{III})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3/4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(\text{I}) \mapsto (\text{I}) + (-\frac{3}{2})(\text{III})} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3/4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(\text{I}) \mapsto (\text{I}) + (-4)(\text{II})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3/4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(\text{III}) \mapsto \frac{1}{4}(\text{III})} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 \end{array} \right) \\ & \implies B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3/2 \\ 0 & 1 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Inverse Matrix) Falls möglich, invertieren Sie die folgende Matrix:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung 3 Bemerkung: $C \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$; unsere Skalare sind also Elemente aus dem Körper $\mathbb{C}$. Wir bringen die Matrix zuerst auf Dreiecksform mittels EZU vom Typ II und III:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(\text{I}) \leftrightarrow (\text{II}), (\text{III}) \leftrightarrow (\text{IV})} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Nach den Umformungen von Typ III haben wir sogar eine Diagonalmatrix. Wir brauchen nur noch Umformungen von Typ I:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(-i) \cdot (\text{III}), i \cdot (\text{IV})} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & i & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (Lösungsräume)

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $x \in \mathbb{R}^4$, $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ und $b \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Es sei $\text{Lös}(A, b) := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = b\}$ der Lösungsraum des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$.

- (i) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Verfahrens die Lösung des homogenen Gleichungssystems, d.h. bestimmen Sie $\text{Lös}(A, 0)$. Drücken Sie $\text{Lös}(A, 0)$ als lineare Hülle einer Menge linear unabhängiger Vektoren aus.
- (ii) Finden Sie nun die Lösung des inhomogenen Gleichungssystems, d.h. bestimmen Sie $\text{Lös}(A, b)$.

Hinweis: Die Lösung des inhomogenen Gleichungssystems ist gegeben durch $\text{Lös}(A, b) = x' + \text{Lös}(A, 0)$. Dabei ist x' eine spezielle Lösung von $Ax = b$.

Lösung 4 Um beide Aufgabenteile zu lösen, müssen wir mit dem Gaußschen Verfahren die Matrix A und die erweiterte Matrix $(A \mid b)$ auf Zeilenstufenform bringen:

$$(A \mid b) \xrightarrow{\text{(II)} \mapsto \text{(II)} - 2\text{(I)} \ \& \ \text{(III)} \mapsto \text{(III)} - 3\text{(I)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{(III)} \mapsto \text{(III)} - \text{(II)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Die Gleichungen $Ax = 0$ bzw. $Ax = b$ sind also äquivalent zu den Gleichungen $A'x = 0$ bzw. $A'x = b'$ mit

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist $\text{Rang}(A) = 2$.

- (i) Der Lösungsraum $\text{Lös}(A \mid 0)$ hat Dimension $n - \text{Rang}(A) = 4 - 2 = 2$. Es gilt:

$$\begin{aligned} x \in \text{Lös}(A \mid 0) &\iff x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \quad x_2 + 2x_3 = 0 \\ &\iff x_2 = -2(x_1 + x_4), \quad x_3 = x_1 + x_4 \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass wir x_1 und x_4 beliebig wählen können und dass die Werte von x_2 und x_3 eindeutig bestimmt, also ist ein $x \in \text{Lös}(A \mid 0)$ der Form

$$x = \begin{pmatrix} \lambda \\ -2(\lambda + \mu) \\ \lambda + \mu \\ \mu \end{pmatrix} = \underbrace{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: v_1} + \underbrace{\mu \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: v_2}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

und somit $\text{Lös}(A \mid 0) = \text{span}(v_1, v_2)$. Da $\dim(\text{Lös}(A \mid 0)) = 2$ ist $\{v_1, v_2\}$ sogar eine Basis vom Lösungsraum.

Bemerkung: Wie immer ist diese Wahl von Basisvektoren von $\text{Lös}(A \mid 0)$ nicht eindeutig.

- (ii) Da $\text{Lös}(A \mid b) = x' + \text{Lös}(A \mid 0)$ mit $x' \in \text{Lös}(A \mid b)$ beliebig¹, müssen wir nur einen Vektor $x' = (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) \in \mathbb{R}^4$ finden, sodass $Ax' = b \iff A'x' = b'$.

$$A'x' = b' \iff x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 = 2, \quad x'_2 + 2x'_3 = 1$$

Wir wählen, zum Beispiel, $x'_2 = 1$; dann muss $x'_3 = 0$, damit die zweite Gleichung erfüllt ist. Aus der ersten Gleichung folgern wir nun, dass dann $x'_1 + x'_4 = 1$. Wir wählen beispielsweise $x'_1 = 0$, und somit muss $x'_4 = 1$ sein. Also ist

$$\text{Lös}(A \mid b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{span} \left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right).$$

¹d.h. $\text{Lös}(A \mid b)$ ist ein *affiner Unterraum* von $\mathbb{R}^n$.